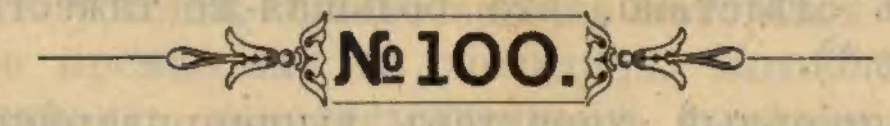
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 100.

IX Сем. 21 Сентября 1890 г. № 4.

РОЛЬ МАШИНЫ АТВУДА

въ воображаемомъ опытномъ доказательствѣ второго закона Ньютона.

Въ настоящей замѣткѣ я имѣю въ виду остановиться на двухъ частныхъ фактахъ въ ходѣ развитія нашихъ понятій о явленіяхъ природы и пояснить ими шаткость нѣкоторыхъ разсужденій, основанныхъ на смѣшеніи истинъ апріорныхъ съ истинами опытными.

Для нашей цѣли мы остановимся на двухъ истинахъ:

1) Всѣ тѣла падаютъ одинаково (1-й законъ Галлилея).

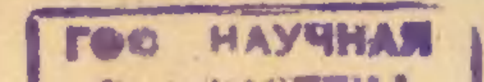
2) Сила измѣряется произведеніемъ изъ массы и ускоренія тѣла, на которое она дѣйствуетъ (2-й законъ Ньютона).

Первая истина есть результатъ опыта и безъ помощи этого послѣдняго установлена быть не можетъ.

Вторая истина есть наше условіе о томъ, какую силу намъ считать больше другой и во сколько разъ. Будучи нашимъ условіемъ, второй законъ Ньютона никакими опытами доказанъ быть не можетъ. Попытки опытнаго доказательства этого закона были-бы однозначущи съ желаніемъ доказать опытомъ, что въ кругѣ всѣ радіусы равны или что треугольникъ имѣетъ три стороны. Только тогда второй законъ Ньютона не былъ-бы опредѣленіемъ, когда мы имѣли-бы другіе признаки существованія силы помимо производимыхъ ею дѣйствій, т. е. сообщенія ускореній массамъ; но тогда мы и силою называли-бы не то, что дается опредѣленіемъ, заключающимся въ первомъ законѣ Ньютона.

Однако исторія науки указываетъ намъ на существованіе совершенно обратныхъ представленій относительно обѣихъ выприведенныхъ истинъ: законъ Галлилея старались вывести изъ апріорныхъ опредѣленій, а второй законъ Ньютона—оправдать и доказать опытомъ.

Замѣчательно, что самъ Галлилей, выведшій изъ своихъ опытовъ первый законъ паденія тѣлъ, въ то же время старался дать этому закону апріорное доказательство. Упомянутое доказательство основано на томъ, что предположеніе Аристотеля о большей скорости паденія болѣе тяжелыхъ тѣлъ ведетъ будто-бы къ противорѣчію самому себѣ. Если тѣло М, будучи тяжелѣе тѣла m, падаетъ скорѣе этого послѣдняго, то оба тѣла М и m, связанныя другъ съ другомъ и представляющія новое тѣло $M+m$, еще болѣе тяжелое, *должны-бы были* по Аристотелю *падать еще скорѣе*, между тѣмъ, съ другой стороны, тѣло $M+m$ *должно падать*



медленнѣе чѣмъ M и скорѣе чѣмъ m, ибо тѣла, обладающія разными скоростями, будучи связаны вмѣстѣ, должны двигаться съ нѣкоторою среднею скоростію, при чемъ тѣло, обладавшее прежде большею скоростью, ускоритъ движеніе тѣла, обладавшаго меньшею скоростію, а это послѣднее замедлитъ движеніе перваго. Такимъ образомъ, говоритъ Галлилей, предположеніе, что бо́льшая тяжесть движется скорѣе чѣмъ меньшая, приводитъ къ слѣдствію, что бо́льшая-же тяжесть (другой разъ) движется медленнѣе *).

Кажущійся апріорный характеръ вышеприведеннаго разсужденія вытекаетъ изъ предположенія очевидности того, что двѣ отдѣльныя массы, получающія отъ дѣйствія земли различныя ускоренія, должны замедлять и соотвѣтственно ускорять одна другую, когда онѣ будутъ связаны вмѣстѣ. Заключеніе о такого рода замедленіи и ускореніи было-бы очевидно, если было-бы доказано, что дѣйствіе тяжести на данную массу остается безъ измѣненія, когда эта послѣдняя связана съ другою. Какъ на примѣръ возможности подобнаго измѣненія можно указать на случай двухъ нѣкоторыхъ кусковъ мягкаго желѣза A и B, находящихся подъ дѣйствіемъ нѣкотораго магнита M: этотъ послѣдній вообще обнаруживаетъ различныя дѣйствія на A и B, взятые порознь или вмѣстѣ, ибо въ послѣднемъ случаѣ A и B намагничиваютъ другъ друга дополнительнымъ образомъ и измѣняютъ свои отношенія къ магниту M.

Но требуемое доказательство того, что тяжесть дѣйствуетъ на каждую часть массы независимо отъ остальныхъ частей этой послѣдней, и есть ничто иное, какъ слѣдствіе опытнаго закона одинаковости паденія тѣлъ, ведущаго къ заключенію о пропорціональности вѣса массѣ, а слѣдовательно—и къ независимости дѣйствія тяжести на отдѣльныя части тѣла. Такимъ образомъ въ разсужденіи Галлилея предполагается уже доказаннымъ тотъ самый законъ паденія, который изъ разсужденій долженъ быть выведенъ.

Можно было-бы замѣтить, что заключеніе о дѣйствіи тяжести на каждую часть массы независимо отъ прочихъ ея частей, однозначно съ заключеніемъ о независимости вѣса тѣла отъ его формы, и что такое заключеніе могло-бы быть выведено изъ опытовъ со взвѣшиваніемъ. Въ такомъ случаѣ законъ одинаковости паденія могъ-бы быть выведенъ безъ непосредственнаго опыта. Но и подобное разсужденіе было-бы не вполнѣ строго, ибо непосредственный опытъ съ паденіемъ тѣлъ доказывалъ-бы тогда, что независимость вѣса отъ формы тѣлъ, существующая въ равновѣсіи, сохраняется при всякой ихъ скорости. Примѣръ возможности обратнаго явленія представляетъ намъ дѣйствіе нѣкотораго тока I на два другіе тока i и i': въ положеніяхъ равновѣсія (т. е. безъ измѣненія взаимнаго расположенія) дѣйствіе I на i не зависитъ отъ присутствія i'; но во время движенія возникаютъ индуктивные токи, при которыхъ упомянутая независимость уже не имѣетъ мѣста.

---

*) Это доказательство помѣщено въ книгѣ Галлилея: Discorsi e demostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica etc. Leida. 1638. Законы паденія излагаются въ видѣ разговора трехъ лицъ, и идеи Галлилея вложены въ реплики Сальвіати.

Что касается теперь до второго закона Ньютона, то мы находимъ во многихъ, весьма солидныхъ въ другихъ отношеніяхъ, курсахъ физики такое положеніе, что упомянутые законы могутъ быть провѣрены съ помощію машины Атвуда *). Такъ какъ второй законъ Ньютона (подобно первому и третьему) представляетъ собою произвольно поставленное опредѣленіе, то при всякой опытной провѣркѣ доказываться будетъ не этотъ законъ, а тѣ условія, существованіе которыхъ при опытѣ принято за доказанное прежде или за очевидное. Подобно тому, если бы мы пожелали провѣрить непосредственнымъ измѣреніемъ, напримѣръ, свойства сѣкущихъ круга, то провѣрили-бы только правильность сдѣланнаго чертежа круга и сѣкущихъ, а не правильность самой теоремы.

Провѣрка машиною Атвуда законовъ дѣйствія силы обыкновенно предлагается въ слѣдующемъ видѣ:

1) Наблюденіемъ равномѣрно ускореннаго движенія, обусловливаемаго прибавочнымъ грузомъ, будто-бы должно подтверждаться то, что одна и та же сила, дѣйствуя непрерывно, производитъ одно и то же ускореніе. Существованіе неизмѣнной силы предполагается при этомъ несомнѣннымъ. Между тѣмъ упомянутымъ опытомъ именно это послѣднее и доказывается, т. е. то, что вѣсъ тѣла при паденіи, въ предѣлахъ опыта, не измѣняется, чего заранѣе предсказать было-бы нельзя. Если-бы раньше было установлено, съ помощью вѣсовъ, что, при незначительной разности высотъ надъ землею, вѣсъ тѣла не мѣняется, то опытъ съ Атвудовой машиной показалъ-бы, что вѣсъ не зависитъ отъ скорости, какъ это случается со взаимодѣйствіемъ двухъ движущихся токовъ или тока и магнита. Или наконецъ тотъ-же опытъ свидѣтельствовалъ-бы намъ о томъ, на сколько въ данномъ случаѣ незамѣтна роль тренія частей машины.

2) Увеличивая массу прибавочнаго груза вдвое, втрое и т. д. такимъ образомъ, чтобы масса всѣхъ подвижныхъ частей машины оставалась неизмѣнною, мы замѣчаемъ, что скорости, пріобрѣтаемыя подвижными частями къ концу одного и того-же промежутка времени, будутъ соотвѣтственно вдвое, втрое и т. д. болѣе. Такого рода опытъ разсматривается, какъ провѣрка того закона, что силы, считаемыя нами вдвое, втрое и т. д. большими, должны одной и той-же массѣ въ одинъ и тотъ-же промежутокъ времени сообщать во столько-же разъ большія скорости. При этомъ допускается очевидность предположенія, что прибавочный грузъ, имѣющій въ *n* разъ большую массу, будетъ во столько-же разъ тяжелѣе, что однако слѣдуетъ только изъ опытнаго факта одинаковости паденія тѣлъ. Такимъ образомъ, желая провѣрить упомянутымъ способомъ законъ Ньютона, мы собственно провѣряемъ законъ Галлилея.

3) Увеличивая массу подвижныхъ частей машины и оставляя прибавочный грузъ однимъ и тѣмъ-же, мы наблюдаемъ къ концу одного и того-же промежутка времени приращенія скоростей обратно пропорціональныя движущимся массамъ. Этимъ опытомъ предполагается провѣрять то положеніе, что одна и та же сила разнымъ массамъ къ концу одного и

*) Напримѣръ, подобное разсужденіе приводится въ извѣстномъ курсѣ физики Pellat.

того-же промежутка времени сообщаетъ тѣмъ меньшія скорости, чѣмъ больше массы. Въ дѣйствительности-же здѣсь провѣряется тотъ фактъ, что при условіяхъ опыта мы имѣемъ право сдѣлать предположеніе о дѣйствіи одной и той-же силы; другими словами, доказывается только, что, при измѣняющихся обстоятельствахъ, вѣсъ прибавочнаго груза остается неизмѣннымъ и что на него не имѣетъ вліянія ни скорость его движенія, ни его скрѣпленіе съ бóльшею массою.

Проф. *Н. Шиллеръ.*

КЪ РЕФОРМѢ УЧЕБНИКА ФИЗИКИ.

ВНѢШНІЯ ДѢЙСТВІЯ ТОКА.

(Продолженіе) *).

§ 30. *Установившееся и неустановившееся электронатяженіе.* Говоря до сихъ поръ объ электронатяженіи, какъ объ особомъ состояніи среды, окружающей токъ (или магнитъ), мы предполагали его *стаціонарнымъ* т. е. уже установившимся и неизмѣннымъ. На самомъ дѣлѣ такое стаціонарное состояніе среды можетъ существовать лишь при условіи, когда токи (и магниты), которыми оно вызвано, не измѣютъ своего относительнаго положенія, и когда сила токовъ (и магн. моменты магнитовъ) остаются абсолютно неизмѣнными. Итакъ *стаціонарное электронатяженіе возможно только при постоянствѣ всѣхъ силъ токовъ и геометрическаго коэффиціента системы.*—При нарушеніи одного изъ этихъ условій, или обоихъ вмѣстѣ, внѣшнія силы тока въ каждой данной точкѣ измѣняются какъ функціи времени, и электронатяженіе вообще называется *неустановившимся* или *перемѣннымъ.* (Примѣры).

§ 31. *Возникающее электронатяженіе.* Путемъ опыта мы не можемъ рѣшить вопроса, которое изъ двухъ явленій: тока въ проводникѣ и электронатяженія внѣ проводника—предшествуетъ другому; для насъ эти нераздѣльно связанныя явленія кажутся возникающими одновременно **). Возникшее электронатяженіе, распространяясь во всѣ стороны отъ своего проводника съ очень большою скоростью, устанавливается однакожъ не мгновенно, а—какъ показываетъ опытъ—въ нѣкоторый конечный промежутокъ времени, въ теченіе котораго оно *усиливается* (понимая подъ этимъ вообще процессъ увеличенія потенціальной энергіи среды). Слѣдовательно всякое возникающее электронатяженіе можно называть еще *усиливающимся.*

§ 32. *Усиливающееся электронатяженіе* бываетъ:

1) Въ теченіе весьма короткаго промежутка времени τ, непосредственно слѣдующаго за моментомъ замыканія цѣпи, содержащей проводникъ и источникъ тока постоянной силы; въ этомъ случаѣ періодъ уси-

*) См. „Вѣстникъ" № 97 и 98.

**) Есть основанія предполагать, что не токъ вызываетъ электронатяженіе, а наоборотъ—самый токъ есть только слѣдствіе электронатяженія. Но вопросъ этотъ, какъ гипотетическій, оставимъ въ сторонѣ.

ленія электронатяженія τ прямо пропорціоналенъ геометрическому коэффиціенту цѣпи и обратно пропорціоналенъ ея сопротивленію.

2) Въ теченіе времѣни t, въ которое геометр. коэффиціентъ проводника (или системы) съ постояннымъ токомъ (или токами) по какой бы то ни было причинѣ увеличивается (§ 20).

3) Въ теченіе времени t_1, въ которое въ проводникѣ, не мѣняющемъ своей формы, сила тока по какой бы то ни было причинѣ увеличивается (§ 7).

Когда проводникъ тока съ установившимся уже электронатяженіемъ перемѣщается весь подъ вліяніемъ какихъ нибудь силъ, то вмѣстѣ съ нимъ переносится и электронатяженіе. Само по себѣ оно остается въ этомъ случаѣ неизмѣннымъ, но относительно неподвижныхъ въ пространствѣ точекъ, къ которымъ постоянный токъ приближается, оно становится усиливающимся. А потому:

4) Въ данной точкѣ электронатяженіе усиливается въ теченіе времени t_2, въ которое къ этой точкѣ приближается немѣняющій своей формы проводникъ съ постояннымъ токомъ (такъ что увеличивается тѣлесный уголъ, подъ которымъ видѣнъ изъ этой точки контуръ тока).

§ 33. *Исчезающее электронатяженіе.* Когда въ провдникѣ съ постояннымъ токомъ и установившимся электронатяженіемъ токъ мгновенно будетъ уничтоженъ, то электронатяженіе, которое само по себѣ существовать не можетъ, тоже уничтожается, но при этомъ исчезаетъ не мгновенно, а въ нѣкоторый промежутъ времени, въ который оно постепенно ослабѣваетъ (понимая подъ этимъ вообще процессъ уменьшенія потенціальной энергіи среды). Слѣдовательно всякое исчезающее электронатяженіе можно назвать *ослабѣвающимъ.*

§ 34. *Ослабѣвающее электронатяженіе* бываетъ:

1) Въ теченіе весьма короткаго промежутка времени τ', непосредственно слѣдующаго за моментомъ размыканія цѣпи, содержащей проводникъ и источникъ тока постоянной силы. (Ниже будетъ разъяснено почему этотъ промежутокъ времени τ' при одинаковыхъ условіяхъ обыкновенно бываетъ меньше τ (§ 32)).

2) Въ теченіе времени t', въ которое геометр. коэффиціентъ проводника (или системы) съ постояннымъ токомъ (или токами) по какой бы то ни было причинѣ уменьшается.

3) Въ теченіе времени t_1', въ которое въ проводникѣ, немѣняющемъ своей формы, сила тока по какой бы то ни было причинѣ уменьшается.

4) Въ данной точкѣ электронатяженіе ослабѣваетъ въ теченіе времени t'_2, въ которое отъ этой точки удаляется немѣняющій своей формы проводникъ съ постояннымъ токомъ (такъ что уменьшается тѣлесный уголъ, подъ которымъ видѣнъ изъ этой точки контуръ тока).

§ 35. *Характерное свойство усиливающагося электронатяженія* заключается въ стремленіи *какъ будто* вытолкнуть вонъ изъ сферы своего распространенія *всякій* встрѣчаемый по пути посторонній проводникъ, независимо отъ его размѣровъ, вещества, формы, расположенія, а также отъ того, существуетъ ли въ немъ другой токъ или нѣтъ *). Въ идеаль-

---

*) Въ пользу такого допущенія говорятъ *отчасти* опыты Э. Томсона (отталкиванія металлическихъ колецъ) и И. Боргмана (вращеній ртути) надъ механиче-

номъ случаѣ (не подлежащемъ опытной провѣркѣ) абсолютно подвижнаго и лишеннаго инерціи проводника, онъ былъ бы отброшенъ усиливающимся электронатяженіемъ со скоростью его распространенія, при чемъ въ самомъ проводникѣ не произошло бы никакихъ перемѣнъ. Въ дѣйствительности, усиливающееся электронатяженіе не въ состояніи побѣдить представляемаго реальнымъ постороннимъ проводникомъ сопротивленія его перемѣщенію: онъ остается поэтому—вообще говоря—на прежнемъ мѣстѣ, но за то *работа электронатяженія, затраченная противъ всѣхъ сопротивленій проводника*, поглащается этимъ послѣднимъ и *обнаруживается въ видѣ несогласнаго тока*, т. е. въ видѣ тока такого направленія, что по законамъ электродинамики (§§ 22, 24) посторонній проводникъ стремится удалиться отъ того основного тока, которымъ вызвано усиленіе электронатяженія *).

§ 36. *Характерное свойство ослабѣвающаго электронатяженія* заключается въ стремленіи *какъ будто* втянуть внутрь *всякій* посторонній проводникъ; въ идеальномъ случаѣ абсолютно подвижный и лишенный инерціи посторонній проводникъ, подъ вліяніемъ ослабѣвающаго электронатяженія слился бы съ основнымъ проводникомъ. Въ дѣйствительности, посторонній реальный проводникъ—вообще говоря—остается на прежнемъ мѣстѣ, но за то *работа электронатяженія, затраченная противъ всѣхъ силъ сопротивленія проводника*, поглощается этимъ послѣд-

---

скими дѣйствіями альтернативныхъ и прерывистыхъ токовъ. (См. статьи И. Боргмана въ № 96 „Вѣстника" и въ 6-мъ Вып. Ж. Р. Ф.-Х. Общ. за тек. годъ). Но эти явленія гораздо сложнѣе.

*) Вышеизложенное гипотетическое, повидимому, свойство усиливающагося электронатяженія есть лишь слѣдствіе изъ явленій индукціи. Въ самомъ дѣлѣ, если подъ вліяніемъ тока A въ постороннемъ неподвижномъ проводникѣ B вызывается несогласный индуктивный токъ, а съ другой стороны извѣстно, что удаленіе отъ A проводника B вызываетъ въ немъ согласный инд. токъ, то существуетъ такая скорость, съ которою удаляемый отъ A проводникъ B не обнаружитъ никакого индуктивнаго тока. Допущеніе, что эта скорость v меньше или больше скорости распространенія самого электронатяженія w, неминуемо привело бы насъ къ противорѣчіямъ, а именно въ 1-мъ случаѣ пришлось бы принять, что въ проводникѣ B подъ вліяніемъ усиливающагося электронатяженія не обнаруживается никакихъ перемѣнъ, а во 2-мъ, при $v>w$, т. е. при $v=w+a$ пришлось бы принять, что при удаленіи проводника B со скоростью $v-(a-\alpha)$, гдѣ $\alpha<a$, т. е. въ проводникѣ, находящимся внѣ всякаго электронатяженія, вызывается индуктивный токъ. Слѣдовательно остается принять, что при удаленіи всякаго посторонняго проводника со скоростью распространенія самаго электронатяженія въ немъ не обнаружится никакого индукт. тока, т. е. никакого поглощенія энергіи. Отсюда видимъ, что ничто намъ не мѣшаетъ принять такое положеніе: „возникновеніе индуктивныхъ токовъ есть слѣдствіе инерціи массы проводника, и было бы невозможнымъ въ проводникахъ лишенныхъ инерціи и выталкиваемыхъ электронатяженіемъ по мѣрѣ его распространенія".—Впрочемъ, если включеніе въ учебный курсъ такого положенія, которое не можетъ быть доказано опытомъ, покажется неумѣстнымъ, можно всю первую часть § 35 пропустить и сказать только, что характерное свойство усиливающагося электронатяженія заключается въ фактѣ возбужденія въ каждомъ постороннемъ проводникѣ несогласнаго тока.

нимъ и *обнаруживается въ видѣ согласнаго тока*, т. е. въ видѣ тока такого направленія, что по законамъ электродинамики (§§ 22, 24) посторонній проводникъ стремится приблизится къ тому основному току, которымъ обусловливается ослабѣваніе электронатяженія *).

§ 37. *Индуктивные токи.* Вышеизложенное вліяніе усиливающагося и ослабѣвающаго электронатяженій на всякій ими обнимаемый проводникъ (§§ 35, 36) называется вообще *индукціей* (гальванической въ отличіе отъ индукціи электростатической, сс. на § 00); несогласные и согласные (по отношенію къ основному) токи, возникающіе въ постороннемъ проводникѣ въ усиливающемся и въ ослабѣвающемъ электронатяженіяхъ, называются вообще *индуктивными токами* или *наведенными*. Основной токъ, благодаря которому происходитъ (по какой либо причинѣ (§§ 32, 34)) усиленіе или ослабленіе электронатяженія, называется часто *индуктирующимъ токомъ* или *наводящимъ*.

§ 38. *Молекулярные индуктивные токи.* Такъ какъ при указанныхъ условіяхъ индуктивные токи возникаютъ всегда и во всякомъ проводникѣ, независимо отъ его величины, то нужно принять, что они возникаютъ въ *каждой отдѣльной молекулѣ проводника*, въ моменты, соотвѣтствующіе разстоянію каждой молекулы отъ центровъ, вызывающихъ усиленіе или ослабѣваніе электронатяженія. Иными словами, нужно принять, что явленіе индукціи сводится въ результатѣ къ раздѣленію обоихъ электричествъ въ каждой молекулѣ проводника по направленіямъ параллельнымъ наводящему проводнику. Если концы такъ заряженной противоположными электричествами молекулы, при посредствѣ другихъ молекулъ того-же проводника, находятся между собою въ сообщеніи, то индуктивный зарядъ молекулы обнаружится токомъ въ проводникѣ. Такіе токи будемъ называть *молекулярными* индуктивными. Если же заряженные концы молекулы не сообщены между собою при посредствѣ другихъ молекулъ, то тока не обнаружится, явленіе будетъ имѣть во все время процесса индукціи характеръ электростатическаго заряда, а по окончаніи процесса вліянія на молекулу, она разрядится черезъ себя.

Молекулярные индуктивные токи, параллельные и одновременно возникающіе, суммируются совершенно такъ, какъ токи гальваническихъ элементовъ, соединенныхъ параллельно (сс. на §§ 00); числомъ такихъ параллельныхъ молек. инд. токовъ (при прочихъ равныхъ условіяхъ) обусловливается количество электричества, приведеннаго въ движеніе индукціею въ данный очень малый промежутокъ времени.—Молекулярные индуктивные токи, возникающіе одновременно въ молекулахъ послѣдовательно расположенныхъ (въ плоскости параллельной плоскости наводящаго проводника), суммируются совершенно такъ, какъ токи гальваническихъ элементовъ, соединенныхъ послѣдовательно (§ 00); числомъ такихъ совмѣщающихся молек. инд. токовъ обусловливается электровозбудительная сила общаго индуктивнаго тока въ данный очень малый промежутокъ времени. (Чертежи для иллюстр. вышеизложеннаго). Отсюда видимъ, что существуетъ полная аналогія между гальваническими элементами, соединяемыми въ батарею, и молекулами проводника, въ которомъ возникаютъ индуктивные токи.

---

*) См. примѣчаніе къ предыдущему § 35.

§ 39. *Понятіе о силѣ индуктивнаго тока.* Молекулярные инд. токи, одновременно возникающіе, суммируются въ одинъ общій индуктивный токъ только въ замкнутомъ проводникѣ, (напр. въ кольцѣ, расположенномъ параллельно наводящему кольцевому проводнику). Если поперечный разрѣзъ такого проводника не особенно великъ (какъ напр. въ проволочномъ кольцѣ), то можно принять, что во всѣхъ молекулахъ каждаго разрѣза инд. токи равносильны и одновременны; если при этомъ проводникъ расположенъ по отношенію къ наводящему вполнѣ симетрично, т. е. если всѣ его разрѣзы находятся въ совершенно одинаковыхъ условіяхъ преобразованія поглощаемой энергіи въ индуктивные токи (что напр. имѣетъ мѣсто при концентрическомъ или вообще параллельномъ расположеніи), то и послѣдовательные молекулярные токи будутъ равносильны и одновременны. Въ такомъ случаѣ, на основаніи § 38, можемъ сказать, что *электровозбудительная сила общаго индуктивнаго тока, возникающаго въ данный моментъ**) *въ замкнутомъ проводникѣ, пропорціональна его длинѣ, а количество электричества, приведенное въ этотъ моментъ въ движеніе, пропорціонально площади разрѣза проводника* (предполагая таковой одинаковымъ по всей длинѣ)**) (потому что число параллельныхъ молек. токовъ будетъ въ этомъ случаѣ пропорціонально толщинѣ проводника, а число послѣдовательно соединяющихся параллельныхъ группъ—будетъ пропорціонально его длинѣ). А такъ какъ пропорціонально увеличенію длины возрастаетъ и сопротивленіе проводника, то при этихъ условіяхъ *сила индуктивнаго тока не зависитъ отъ длины проводника* (а стало быть и отъ электровозб. силы), *а только отъ площади его разрѣза* и—наоборотъ—*электровозбудительная сила индуктивнаго тока не зависитъ отъ толщины проводника, а только отъ его длины.* (Полная аналогія съ выводами (§ 00): сила тока батареи, составленной изъ послѣдовательно соединенныхъ гальван. элементовъ и замкнутой проводникомъ нулевого сопротивленія, не зависитъ отъ числа элементовъ, а лишь отъ величины каждаго, и—наоборотъ—электровозб. сила батареи не зависитъ отъ величины элементовъ, а только отъ ихъ числа).

---

*) Точнѣе—въ данный очень малый промежутокъ времени.

**) Необходимо разъяснить учащимся, что эта зависимость имѣетъ мѣсто, строго говоря, лишь при указанныхъ условіяхъ, и лишь въ томъ случаѣ, когда во *всѣхъ* частяхъ проводника индуктируются одинаковые токи. Если-же въ идуктивную цѣпь вводится какое нибудь *внѣшнее* сопротивленіе R, въ которомъ индуктивные токи не возбуждаются, то, очевидно, въ этомъ случаѣ электровозб. сила индуктивнаго тока не будетъ зависѣть отъ *длины* этой внѣшней части проводника и—наоборотъ—общая сила тока (индуктивнаго) въ цѣпи съ увеличеніемъ этой длины, т. е. съ увеличеніемъ R, будетъ уменьшаться. Однимъ словомъ, при такихъ условіяхъ подверженную индукціи часть проводника надо разсматривать какъ батарею, а неподверженную индукціи, внѣшнюю часть проводника—какъ вводимое въ цѣпь внѣшнее сопротивленіе. Не трудно видѣть, что и въ этомъ случаѣ наивыгоднѣйшее дѣйствіе индуктивнаго тока въ этой внѣшней части проводника, будетъ въ случаѣ равенства сопротивленій активной и пассивной частей проводника (сс. на §§ 00 о наивыгоднѣйшихъ соединеніяхъ гальв. элементовъ).

Ниже увидимъ, что силы индуктивныхъ токовъ въ постороннемъ проводникѣ обусловливаются еще силою тока въ наводящемъ проводникѣ, быстротою измѣненій электронатяженія и геометрическимъ коэффиціентомъ системы проводниковъ (основного и посторонняго).

§ 40. *Частные случаи возникновенія индуктивныхъ токовъ.* Въ каждомъ постороннемъ проводникѣ, какъ мы сказали выше, несогласные инд. токи возникаютъ подъ вліяніемъ усиливающагося, а согласные— подъ вліяніемъ ослабѣвающаго электронатяженій. Потому, припоминая всѣ случаи когда электронатяженіе можетъ усиливаться или ослабѣвать (§§ 32, 34), имѣемъ:

1) Несогласный индукт. токъ возникаетъ въ постороннемъ проводникѣ всякій разъ, когда мгновенно замыкается цѣпь, заключающая основной проводникъ и источникъ тока постоянной силы; наоборотъ— при размыканіи, этой цѣпи, въ постороннемъ проводникѣ наводится согласный токъ. Оба эти индуктивные тока существуютъ въ теченіе весьма короткихъ промежутковъ времени, непосредственно слѣдующихъ за моментами замыканія и размыканія цѣпи (первый—въ теченіе τ, второй— въ теченіе τ'); промежутки эти—какъ ниже будетъ разъяснено—въ большинствѣ случаевъ не одинаковы, и согласный индуктивный токъ, по времени, короче несогласнаго.

(*Опытъ* съ индуктивною катушкою, безъ желѣзнаго сердечника).

2) Несогл. инд. токъ въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится въ теченіе всего того времени (t), въ которое геометр. коэффиціентъ основного проводника, съ токомъ постоянной силы, по какой бы то ни было причинѣ увеличивается; наоборотъ—при уменьшеніи этого коэффиціента, въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится все время (t') согласный инд. токъ. Въ обоихъ случаяхъ *быстрота* измѣненій геом. коэффиціента вліяетъ одинаково на силу инд. токовъ: чѣмъ быстрѣе происходятъ эти измѣненія, тѣмъ больше бываетъ (въ теченіе соотв. имъ промежутковъ t и t') электровозб. силы инд. токовъ. (*Опытъ* *)).

3) Несогл. инд. токъ въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится въ теченіе всего времени (t_1), въ которое въ основномъ проводникѣ, неменяющемъ своей формы, сила тока по какой бы то ни было причинѣ увеличивается; наоборотъ—при уменьшеніи силы наводящаго тока, индук-

*) Доказать это положеніе на опытѣ, весьма не легко, и при помощи обыкн. принадлежностей физ. кабинетовъ почти немыслимо. Для этой цѣли пришлось бы имѣть особый приборъ, такъ устроенный, чтобы наводящій токъ можно было раздвигать и чтобы притомъ относительно внѣшняго проводника расположеніе его вообще не мѣнялось. Въ виду этого остается или *отложить* этотъ опытъ на послѣ, или-же показать его въ измѣненномъ видѣ, сдѣлавъ предварительно слѣдующую весьма важную оговорку: „Ниже будетъ показано, что *желѣзо* обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, а именно, что *приближеніе желѣза къ проводнику тока оказываетъ на усиленіе электронатяженія точно такое-же вліяніе, какъ увеличеніе геом. коэффиціента проводника*, и наоборотъ—удаленіе желѣза отъ тока равносильно уменьшенію геом. коэфф. его проводника.“ Послѣ этого опытъ, о которомъ идетъ рѣчь, сведется на обнаруженіе индукт. токовъ во внѣшней катушкѣ при введеніи во внутреннюю катушку и выведеніи изъ нея желѣзнаго цилиндра, или пучка проволокъ.

тируется въ постор. проводникѣ и длится все время (t'_1) согласный токъ. Въ обоихъ случаяхъ быстрота измѣненій силы навод. тока вліяетъ на силу инд. токовъ какъ и въ предыдущемъ случаѣ. (*Опытъ* *)).

4) Несогл. инд. токъ въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится въ теченіе всего того времени (t_2), въ которое разстояніе его отъ наводящаго тока (постояннаго и неизмѣннаго) уменьшается; наоборотъ—при увеличиваніи этого разстоянія, въ постор. проводникѣ возникаетъ и длится все время (t'_2) согласный инд. токъ. Въ обоихъ случахъ скорость перемѣщенія одного изъ проводниковъ вліяетъ на силу инд. токовъ какъ и въ предыдущихъ случаяхъ. (*Опытъ*—вдвиганія и выдвиганія катушекъ.)

§ 41. *Инд. токи въ нелинейныхъ проводникахъ* возникаютъ точно такъ-же и при тѣхъ-же условіяхъ какъ и въ проводникахъ линейныхъ (напр. проволокахъ). И здѣсь тоже молекулярные инд. токи суммируются (§ 38) и—если они замкнуты—циркулируютъ по нѣкоторымъ линіямъ внутри самой массы проводника. Напр. въ сплошномъ металл. кружкѣ, расположенномъ параллельно кольцевому наводящему току, въ каждомъ изъ вышеперечисленныхъ 4-хъ случаевъ индуктируются совмѣстные параллельные токи, расположенные концентрически. (Чертежъ). Въ пустомъ цилиндрѣ, обнимающемъ напр. катушку наводящаго тока, индукт. токи располагаются параллельно по разрѣзамъ цилиндра. (Чертежъ). И пр.

(*Опытъ* ослабленія дѣйствія индукт. катушекъ, когда между ними вставленъ пустой металл. (не желѣзный) цилиндръ. Разъясненіе: работа возникающаго и исчезающаго электронатяженія поглощается въ большей части молекулами цилиндра и идетъ на возбужденіе индукт. токовъ въ цилиндрѣ; эти токи—въ свою очередь разсматриваемые какъ наводящіе по отношенію къ внѣшней катушкѣ—дѣйствуетъ прямо противоположно основнымъ наводящимъ токамъ внутренней катушки, т. е. при замыканіи цѣпи, уменьшаютъ, а при размыканіи увеличиваютъ геом. коэфф. основного наводящаго тока).

§ 42. *Индуктивные заряды незамкнутыхъ проводниковъ*. Если незамкнутый проводникъ (напр. кольцо съ разрѣзомъ) расположенъ по отношенію къ основному току такъ, что молекулярные заряды (§ 38), суммируясь, не могутъ образовать замкнутаго общаго инд. тока, то концы проводника заряжаются подъ вліяніемъ индукціи противоположными электричествами, которыя—или соединяются обратно *черезъ самый проводникъ* послѣ того какъ процессъ индукціи окончится, и образуютъ тогда *мгновенный* токъ обратнаго направленія*), или-же—когда сопротивленіе, встрѣчаемое въ мѣстѣ разрѣза проводника не особенно велико—соединяются *черезъ изоляторъ* до окончанія процесса индукціи, замыкая такимъ образомъ индуктивный токъ въ моментъ разряда.

---

*) Для этого опыта удобны элементы, или батарея съ опускающимися по желанію электродами.

*) При этихъ условіяхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ могутъ имѣть мѣсто такъ называемыя „электрическія колебанія“, зависящія отъ того, что незамкнутый проводникъ быстро и неоднократно перезаряжается.

(*Опытъ* съ индукт. катушками, когда между ними вставленъ пустой металл. (не желѣзный) цилиндръ съ разрѣзомъ по образующей. Разъясненіе: дѣйствія (напр. физiологическія) инд. токовъ въ этомъ случаѣ будутъ сильнѣе нежели въ предыдущемъ (опытъ § 41) ибо, хотя часть работы электронатяженія и поглощается цилиндромъ, но прежніе инд. токи въ немъ не циркулируютъ, а *разрядные токи*—если ихъ разсматривать какъ наводящіе по отношенію къ внѣшней катушкѣ—не ослабляютъ, а усиливаютъ явленіе идукціи).

(*Опытъ*—искры, между свободными концами внѣшней катушки въ воздухѣ).

(*Опыты* съ Гейслеровыми трубками. Разъясненія). *Ш.*

(Продолженіе слѣдуетъ).

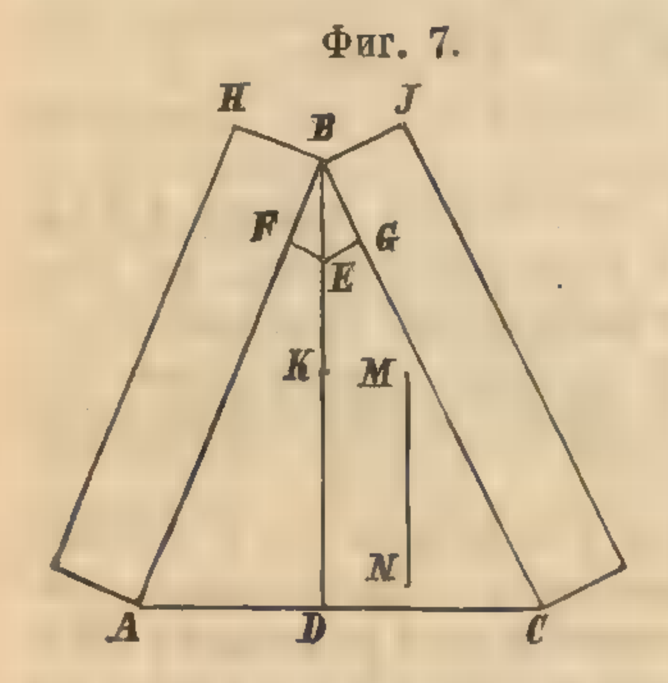
О ПРОЕКЦІЯХЪ ПРЯМОЙ И ТОЧКИ НА СТОРОНЫ

треугольника.

А. Проекціи прямой линіи.

1. Въ △ ABC (фиг. 7) отъ вершины его B отложимъ по соотвѣтствующей высотѣ произвольный отрѣзокъ BE и проектируемъ его на стороны даннаго треугольника,—получимъ проекціи ея: линіи BF и BG и точку D. Построимъ на AB и BC и соотвѣтствующихъ проекціяхъ BF и BG прямоугольники AH и CJ; тогда

Фиг. 7.



площ. прям. AH=площ. прям. CJ.

Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ BFE и BAD, BEG и BDC получаемъ:

$$BF.BA=BE.BD=BG.BC$$

но

BF.BA выражаетъ площ. прям. AH,

BG.BC „ „ „ CJ

такъ какъ

$$BF=BH,\ BG=BJ.$$

Значитъ прям. AH рарномѣренъ прям. CJ.

2. Теперь возьмемъ внутри треугольника ABC какую нибудь другую линію MN перпендикулярную къ AC и проектирумъ ее на стороны треугольника. Тогда—прямоугольники, построенные на этихъ проекціяхъ и соотвѣтствующихъ сторонахъ △-ка, будутъ равномѣрны. Въ самомъ дѣлѣ, отложимъ на высотѣ BD отрѣзокъ BK=MN. Очевидно проекціи прямыхъ MN и BK на сторонахъ △-ка также равны, а потому выведенное свойство проекцій отрѣзка BK также распространяется и на л. MN.

И такъ *прямоугольники, построенные на 2-хъ сторонахъ треуголь-*

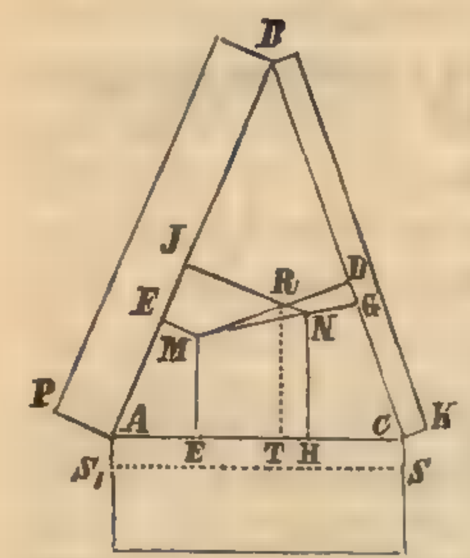
ника и соотвѣтствующихъ проекціяхъ на нихъ линіи, перпендикулярной къ третьей сторонѣ, равномѣрны.

3 Теперь выведемъ свойство проекцій на стороны $\triangle$-ка произвольной линіи, находящейся внутри его. Оно таково:

Если произвольную прямую линію (MN), находящуюся внутри треугольника, проектируемъ на его стороны, то сумма площадей прямоугольниковъ, построенныхъ на 2-хъ сторонахъ и соотвѣтствующихъ проекціяхъ этой линіи по одну ея сторону, равна площади прямоугольника, построеннаго на третьей сторонѣ и соотвѣтствующей проекціи той-же линіи (по другую ея сторону).

Доказательство.—Нужно доказать (см. фиг. 8) что

Фиг. 8.



площ. прям. AL=пл. пр. BP+пл. пр. BK.

Для доказательства изъ точки R пересѣченія прямыхъ MD и NJ опустимъ перпендикуляръ RT на линію AC.

Если отложимъ CS=TH, то на основаніи предыдущаго и зная, что RN$\perp$AB, имѣемъ:

пл. пр. AS=пл. пр. BK,

на томъ же основаніи, зная что RM$\perp$BC, получимъ:

пл. пр. S_1L=пл. пр. BP.

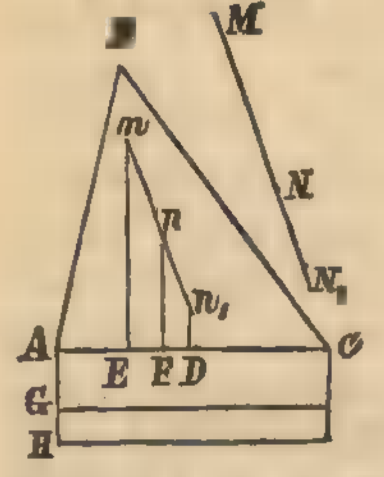
Складывая почленно 2 послѣднія равенства, получимъ:

пл. пр. AL=пл. пр. BP+пл. пр. BK,

что и требовалось доказать.

4. Этотъ выводъ справедливъ также и для всякой прямой (MN), находящейся внѣ треугольника. Въ самомъ дѣлѣ—положимъ, во первыхъ, что внутри $\triangle$-ка можно провести линію mn_1= || MN (см. фиг. 9),—тогда очевидно предыдущій выводъ справедливъ для линіи MN, ибо ея проекціи равны соотвѣтствующимъ проекціямъ линіи mn_1.

Фиг. 9.



Положимъ, во вторыхъ, что внутри треугольника нельзя провести прямой равной и параллельной данной прямой. Тогда для доказательства разобьемъ данную линію MN_1 на такія части: MN и NN_1, чтобы для каждой изъ нихъ можно было провести внутри треугольника равную и параллельную. Пусть mn_1 || =MN, mn= || NN_1.

Примѣнивъ къ каждой изъ линій mn_1 и mn извѣстное построеніе прямоугольниковъ (напр. на AC) и притомъ такъ, чтобы одинъ соприкасался съ другимъ, получимъ окончательно прямоугольники съ высотами равными суммѣ соотвѣтствующихъ проекцій отрѣзковъ линіи MN_1 или—что то же—съ высотами равными соотвѣтствующимъ проекціямъ линіи MN′.

Итакъ выведенное свойство проекцій справедливо для всякой про-

извольно взятой прямой, при построеніи прямоугольниковъ, предполагая однакожъ ее находящеюся внутри треугольника, чтобы узнать который изъ 3-хъ прямоугольниковъ равенъ суммѣ 2-хъ прочихъ.

5. Разсмотримъ нѣкоторыя слѣдствія:

a) Взявъ въ прямоугольномъ треугольникѣ за проектируемую линію гипотенузу, получимъ: *квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ* т. е. Пиѳагорова теорема.

b) Взявъ въ прямоугольномъ треугольникѣ за проектируемую линію одинъ изъ катетовъ, увидимъ, что катетъ есть средній пропорціональный между гипотенузой и прилежащимъ отрѣзкомъ ея, образованнымъ перпендикуляромъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу.

c) Описавъ около произвольнаго треугольника окружность и принявъ за проектируемую линію діаметръ, проведенный черезъ одну изъ его вершинъ, увидимъ, что: квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ остраго угла (тупого), равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ (сложенной съ) удвоеннаго произведенія основанія на отрѣзокъ его отъ вершины острого (тупого) угла до высоты.

B. Проекціи точки.

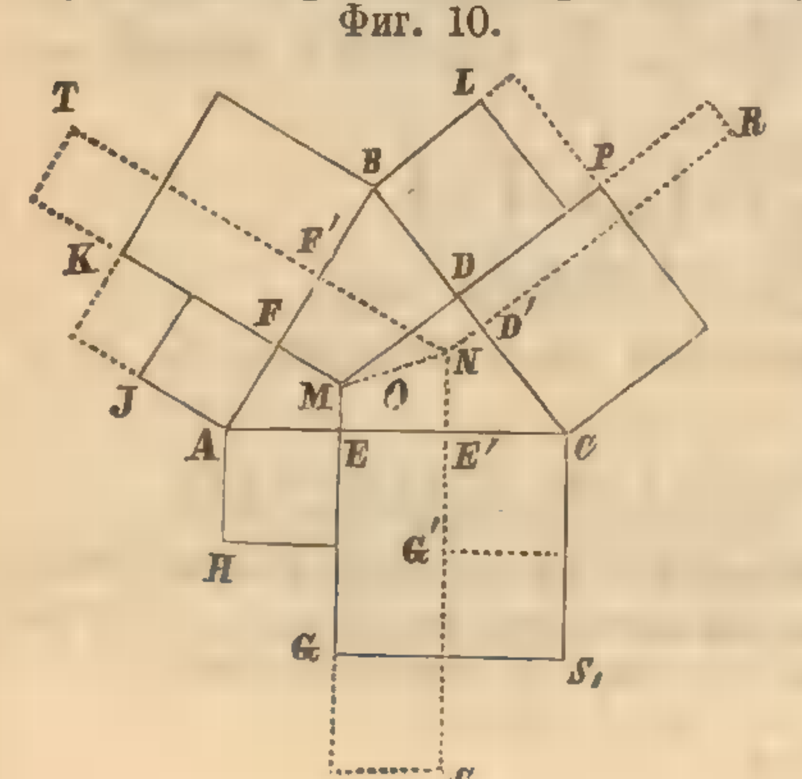
1. Примѣнимъ предыдущій выводъ къ доказательству слѣдующаго: *Если изъ произвольной (внутренней или внѣшней) точки опустимъ перпендикуляры на стороны треугольника, то получимъ на нихъ 6 отрѣзковъ, и сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на 3 отрѣзкахъ, не имѣющихъ общей вершины (не смежныхъ), равномѣрна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на трехъ другихъ отрѣзкахъ.*

Доказательство. Если M—данная точка, MD, ME и MF—перпендикуляры изъ одной точки на стороны даннаго треугольника, JF, DL и т. д.—квадраты, построенные на отрѣзкахъ AF, BD и т. д., то требуется доказать, что

пл. кв. JF + п. к. DL + п. к. CG = п. к. BK + п. к. CP + п. к. EH.....(1)

Для доказательства черезъ точку O—центръ описаннаго круга—проведемъ линію MN (фиг. 10) и отложимъ на ней ON = OM; изъ N опустимъ перпендикуляры на стороны даннаго треугольника,—на трехъ полученныхъ (не смежныхъ) отрѣзкахъ BD′, CE′ и AF′ построимъ квадраты,—эти послѣдніе очевидно равны соотвѣтствующимъ CP, EH и BK.

Фиг. 10.



Такимъ образомъ мы здѣсь пользуемся методомъ наложенія,—но, какъ видно изъ чертежа, площади квадратовъ не совмѣстились,—слѣдовательно, если равенство (1) справедливо, необходимо, чтобы существовало равенство

(пл. пр. LP + пл. пр. PD′) +
+ (пл. пр. JK + пл. пр. F′K) =
= пл. пр. G′S′ + пл. пр. GE′.

Но

пл. пр. LP + пл. пр. PD' = пл. пр. DR,	въ которомъ D'R=BC.
„ „ JK „ „ F'K = „ „ FT	„ F'T=AB.
„ „ G'S' „ „ GE' = „ „ ES	„ E'S=AC.

Итакъ должно существовать слѣдующее равенство

пл. пр. DR + пл. пр. FT = пл. пр. ES,

которое дѣйствительно и существуетъ, такъ какъ прямоугольники DR, FT и ES образованы изъ сторонъ даннаго треугольника и соотвѣтствующихъ проекцій на нихъ линіи MN.

Слѣдовательно равенство (1) также справедливо.

2. Наоборотъ,—если въ какомъ нибудь треугольникѣ ABC на сторонахъ его намѣчены 3 точки D, E и F такъ, что существуетъ равенство (1), то перпендикуляры, возставленные изъ этихъ точекъ, пересѣкутся между собою въ одной точкѣ.

Дѣйствительно, если предположимъ обратное, т. е. что перпендикуляръ къ AB изъ M—пересѣченія 2-хъ линій MD и ME перпендикулярныхъ къ BC и AC—не пройдетъ черезъ точку F, то на основаніи предыдущаго можемъ написать равенство подобное (1), но въ которомъ одинъ изъ квадратовъ IF или KB уменьшонъ, а другой увеличенъ, что очевидно невозможно; слѣдовательно предположеніе, что перпендикуляръ изъ M къ линіи AB не пройдетъ черезъ F невѣрно, а потому:

Если въ какомъ нибудь треугольникѣ на сторонахъ его намѣчены три точки, которыя раздѣляютъ стороны на 6 отрѣзковъ, такимъ образомъ, что сумма квадратовъ 3-хъ изъ нихъ, не имѣющихъ общей вершины, равна суммѣ квадратовъ 3-хъ другихъ отрѣзковъ, то перпендикуляры изъ этихъ точекъ къ сторонамъ треугольника пересѣкутся въ одной точкѣ.

3. Приложимъ это условіе пересѣченія перпендикуляровъ къ сторонамъ треугольника къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

a) Перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ (центръ описанной окружности).

Дѣйствительно, назвавъ стороны даннаго треугольника черезъ a, b и c, а слѣдовательно отрѣзки черезъ $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, получимъ тождество:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

b) Высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

Дѣйствительно, назвавъ соотвѣтствующія высоты черезъ h_a, h_b и h_c, получимъ тождество:

$$(c^2-h^2_a)+(a^2-h^2_b)+(b^2-h^2_c)=(b^2-h_a^2)+(c^2-h^2_b)+(a^2-h_b^2).$$

Принявъ въ прямоугольномъ треугольникѣ за проектируемую точку конецъ гипотенузы, мы опять получимъ Пиѳагорову теорему.

Юнкеръ Инженернаго Училища *А. Плетневъ* (Спб.).

РЕЦЕНЗІИ.

И. Кошельковъ. Предварительный курсъ физики въ объемѣ среднихъ учебныхъ заведеній. Ч. I. Новгородъ. 1890 г. Цѣна 1 р.

Появленіе названной книги обусловлено тѣмъ обстоятельствомъ, что въ виду увеличенія числа часовъ, посвящаемыхъ по новой программѣ въ реальныхъ училищахъ на физику, оказалось возможнымъ выдѣлить изложеніе начальныхъ свѣдѣній по физикѣ въ особый предварительный курсъ, проходимый въ IV и V классахъ. Не смотря на свое скромное названіе „предварительнаго" курса, разбираемый учебникъ заслуживаетъ во многихъ отношеніяхъ предпочтенія передъ общепринятыми курсами физики. Онъ отличается стремленіемъ къ точности опредѣленій, и не желаетъ маскировать недостатокъ аргументаціи и доказательствъ обиліемъ словъ и мало поясняющихъ дѣло примѣровъ. Тамъ гдѣ теоретическое доказательство недоступно ученику, авторъ просто формулируетъ предложеніе, ограничиваясь опытною его повѣркою.

Въ вышедшей 1-й части содержится: механика твердаго, жидкаго и газообразнаго тѣла, ученіе о теплотѣ и химическія свѣдѣнія; послѣдній отдѣлъ изложенъ прекрасно: просто, систематически и обстоятельно. Въ другихъ главахъ я позволю себѣ указать нѣкоторыя погрѣшности.

На стр. 5 опредѣленіе поступательнаго движенія неполно. При поступательномъ движеніи тѣла всѣ точки его описываютъ равные и (надо добавить) параллельные пути. Иначе ученикъ имѣетъ право считать движущимся поступательно и раздувающійся шаръ, ибо всѣ точки его проходятъ равные пути.

На стр. 15 авторъ опредѣляетъ силу, какъ причину измѣненія движенія, и нигдѣ не пользуется далѣе этимъ опредѣленіемъ. И о самомъ измѣненіи движенія не дается понятія, ибо авторъ излагаетъ только вопросъ о равномѣрномъ движеніи.

Опытъ со сцѣпляющимися пластинками (стр. 17) въ той формулѣ, какъ описанъ въ книгѣ, не годится, ибо явленіе можетъ быть приписано и дѣйствительно зависитъ отъ давленія воздуха.

На стр. 23 начало независимости дѣйствія силъ не имѣетъ подъ собою почвы, ибо о самомъ дѣйствіи силъ не дано понятія.

Въ §§ 25—28 первой главы не сказано, что все изложенное въ нихъ относится только къ неизмѣняемымъ системамъ точекъ.

На стр. 41 не выясненъ случай равновѣсія шара, когда центръ тяжести выше точки опоры, и все таки равновѣсіе безразличное.

Масса, согласно рутинѣ, опредѣлена какъ количество вещества.

А. Л. Корольковъ.

Письма въ редакцію.

I.

М. Г., г. Редакторъ.

Въ № 97 издаваемаго Вами журнала „Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики" помѣщена статья проф. Ромера „*Новое выраженіе для* π", въ которой онъ выводитъ слѣдующую формулу

$$\pi = \textit{Пред.}\, 2^p \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots\ldots}}}}$$

Это выраженіе не ново, оно встрѣчается у г. Починскаго въ его „Новыхъ изслѣдованіяхъ въ области элементарной геометріи, выпускъ I, Одесса 1879 г." на стр. 38, на что считаю долгомъ обратить Ваше вниманіе.

Пріймите и пр. *А. Старковъ* (Одесса).

II.

М. Г., г. Редакторъ.

„Новая" формула для π, данная проф. Ромеромъ (въ № 97 „Вѣстника"), нова развѣ въ томъ смыслѣ, что впервые появляется въ „Вѣстникѣ". Она представляетъ собою прямое и непосредственное слѣдствіе формулы удвоенія

$$a_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}} \qquad (\text{при } r=1)$$

приводится во многихъ учебникахъ (см. напр. „Геометрію" Урусова, „Eléments de Géometrie" par Amiot и др.) и была извѣстна еще Віету.

Пріймите и пр. *М. Попруженко* (Оренбургъ).

ЗАДАЧИ.

№ 91. Стороны нѣкотораго треугольника удовлетворяютъ условіямъ

$$x+y-z=780$$

$$y+z-x=1040$$

$$z+x-y=910.$$

Найти три его высоты h_x, h_y, h_z. *Ш.*

№ 92. Въ окружности радіуса R вписанъ четыреугольникъ ABCD, коего сторона AB есть діаметръ. Разстоянія точки пересѣченія діагоналей M отъ вершинъ A и B извѣстны (т. е. AM$=a$, BM$=b$). Опредѣлить стороны и діагонали четыреугольника.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 93. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Прямол. Тригонометріи" Пржевальскаго, изд. 3-ье. 1884, № 14):

„Съ корабля, находящагося въ A, видятъ два маяка B и C на „западъ; черезъ часъ плаванія къ сѣверу оба эти маяка уже видны: „одинъ на юго-западъ, а другой на юго-юго-западъ отъ корабля. Зная „разстояніе между маяками (BC$=a$), найти скорость хода корабля".

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 94. Черезъ вершину D даннаго параллелограма ABCD проведена прямая ED. Найти на ней такую точку X, чтобы сумма угловъ BXA и CXD равнялась двумъ прямымъ. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

№ 95. Рѣшить уравненія

$$x^5 = mx + ny$$

$$y^5 = my + nx.$$

И. Ивановъ (Спб.)

№ 96. Вѣсы устроены съ такимъ разсчетомъ, чтобы верхнее положеніе чашки было выше средняго на 2,83 дм. и чтобы среднее ариѳметическое разстояніе между осью коромысла и крайними положеніями вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ чашки, было 5,3 дм. Опредѣлить длину коромысла и его наклонъ въ крайнемъ положеніи.

Кн. *А. Гагаринъ* (Спб.)

Упражненія для учениковъ.

1. Построить треугольникъ по тремъ его медіанамъ.

Намекъ. Пусть ABC требуемый треугольникъ; D, E, F—средины его сторонъ: AB, BC, CA; AE, BF, CD даны. Проведите изъ F прямую FK параллельную AE и равную AE, соедините K съ B, обратите вниманіе на стороны BF, FK, KB треугольника BFK и усмотрите, что точка E есть его *медіацентръ* т. е. точка встрѣчи медіанъ.

Какъ перейти отъ вспомогательнаго треугольника BFK къ требуемому ABC?

2. На сторонахъ треугольника ABC (внѣ его) построены квадраты, свободныя вершины которыхъ соединены прямыми; пусть AEF, BE_1F_1, CE_2F_2 составленные такимъ путемъ треугольники. Построить ABC, зная длины EF, E_1F_1, E_2F_2.

Намекъ. Продолжите медіану AD на длину ей равную.

3. 1) Если многоугольникъ вписанъ въ окружность, то равенство сторонъ влечетъ за собою равенство угловъ. (Правильный многоугольникъ).

2) Если многоугольникъ вписанъ въ окружность, то равенство угловъ *не* влечетъ за собой равенства сторонъ. (*Примѣръ:* прямоугольникъ).

3) Если многоугольникъ описанъ около окружности, то равенство угловъ влечетъ за собой равенство сторонъ. (Правильный многоугольникъ).

4) Если многоугольникъ описанъ около окружности, то равенство сторонъ *не* влечетъ за собой равенства угловъ. (*Примѣръ:* ромбъ).

4. 1) Въ вписанномъ (въ окружность) четыреугольникѣ сумма двухъ противолежащихъ угловъ равна суммѣ двухъ остальныхъ угловъ.

2) Въ описанномъ (около окружности) четыреугольникѣ сумма двухъ противолежащихъ касательныхъ равна суммѣ двухъ остальныхъ касательныхъ.

3) Въ вписанномъ многоугольникѣ четнаго числа вершинъ, сумма угловъ при вершинахъ: 1-й, 3-й, 5-й,.... равна суммѣ угловъ при вершинахъ: 2-й, 4-й, 6-й.......

4) Въ описанномъ многоугольникѣ четнаго числа сторонъ, сумма касательныхъ: 1-й, 3-й, 5-й..... равна суммѣ касательныхъ: 2-й, 4-й, 6-й......

Требуется оправдать справедливость такого обобщенія.

Намекъ. Радіусами, проведенными во всѣ вершины вписаннаго многоугольника, вы разобьете его на равнобедренные треугольники; въ каждомъ изъ нихъ отмѣтьте (одинаковыми буквами или цыфрами) равные углы и смотрите!

Прямыми, проведенными изъ центра во всѣ вершины описаннаго многоулольника, вы разобьете его на треугольники; изъ каждой вершины взятаго мнгоугольника исходятъ двѣ равныя касательныя; отмѣтьте ихъ (одинаковыми буквами или цыфрами) и—смотрите!

Примѣчаніе. Если число вершинъ взятаго вписаннаго многоугольника нечетное, то его можно разсматривать какъ многоугольникъ четнаго числа вершиин, въ которомъ *два радіуса совпали.*

Если число сторонъ взятаго описаннаго многоугольника нечетное, то его можно разсматривать какъ могоугольникъ четнаго числа сторонъ, въ которомъ *двѣ точки касанія совпали.*

А. Гольденбергъ (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 476. Доказать справедливость тождества:

$$\mathrm{Sin}(a+b)\mathrm{Sin}(a-b)\mathrm{Sin}(c+d)\mathrm{Sin}(c-d)+$$
$$\mathrm{Sin}(c+b)\mathrm{Sin}(c-b)\mathrm{Sin}(d+a)\mathrm{Sin}(d-a)+$$
$$\mathrm{Sin}(d+b)\mathrm{Sin}(d-b)\mathrm{Sin}(a+c)\mathrm{Sin}(a-c)=0.$$

Умноживъ обѣ части тождества на 4, мы можемъ представить каждое изъ слагаемыхъ посредствомъ разности косинусовъ въ слѣдующемъ видѣ:

первое слагаемое $=(\mathrm{Cos}2b-\mathrm{Cos}2a)(\mathrm{Cos}2d-\mathrm{Cos}2c)$,
второе „ $=(\mathrm{Cos}2b-\mathrm{Cos}2c)(\mathrm{Cos}2a-\mathrm{Cos}2d)$,
третье „ $=(\mathrm{Cos}2b-\mathrm{Cos}2d)(\mathrm{Cos}2c-\mathrm{Cos}2a)$.

Раскрывая скобки въ этихъ послѣднихъ произведеніяхъ, увидимъ, что сумма вышеупомянутыхъ слагаемыхъ равна нулю.

В. Будянскій (Кіевъ), *С. Карновичъ* и *Г. Ульяновъ* (Воронежъ), *Н. Волковъ* (Спб.). Ученики: Курск. г. (8) *С. Д.*, Симб. г. (7) *В. Б.*, *В. Ф.* и *П. Б.*, Кам.-Под. г. (7) *Я. М.*, Камыш. р. уч. (7) *А. З.*, Спб. Ек. ц. уч. (7) *В. М.*

№ 507. Рѣшить уравненія:

$$a^2-x^2=3xy$$
$$(\sqrt{y}-\sqrt{x})(a-x)=3(x+y)\sqrt{x}.$$

Умножимъ обѣ части второго уравненія на $\sqrt{x}$, тогда

$$(\sqrt{xy}-x)(a-x)=3x(x+y),$$

что можно написать еще такимъ образомъ

$$[\sqrt{xy}+a-(a+x)](a-x)=3x^2+3xy,$$

откуда

$$(\sqrt{xy}+a)(a-x)=2x^2+3xy+a^2.$$

Замѣнивъ здѣсь x^2 величиною a^2-3xy изъ перваго уравненія, найдемъ

$$(\sqrt{xy}+a)(3\sqrt{xy}-x-2a)=0,$$

т. е.

$$xy=a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

$$xy=\left(\frac{x+2a}{3}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

Изъ (α) и (1) получимъ $x=\pm a\sqrt{-2}$, а изъ (β) и (1), $x=-\frac{a}{2}$.

Затѣмъ соотвѣтственно: $y=\pm\frac{a}{\sqrt{-2}}$, $y=-\frac{a}{2}$. Корни $x=-\frac{a}{2}$ и $y=-\frac{a}{2}$ удовлетворяютъ только первому уравненію.

Н. Артемьевъ (Спб.). Ученикъ Курск. г. (8) *В. Х.*

№ 533. Построить треугольникъ по суммѣ двухъ сторонъ, биссектору ихъ угла и третьей сторонѣ.

Обозначимъ стороны $\triangle$-ка черезъ a, b, c, биссекторъ угла, противолежащаго сторонѣ a, черезъ m и сумму сторонъ b и c черезъ s. Возьмемъ формулу, связывающую биссекторъ угла $\triangle$-ка съ его сторонами:

$$bcs^2=m^2s^2+a^2bc,$$

откуда

$$bc=\frac{m^2s^2}{s^2-a^2}=\frac{m^2s^2}{p^2}.$$

Строимъ прямоугольный $\triangle$-къ BCD по гипотенузѣ DC$=s$ и катету BC$=a$. На катетѣ DB откладываемъ длину DE равную m и проводимъ EF $\parallel$ BC, тогда

$$DF=\frac{ms}{p}=\sqrt{bc}.$$

Теперь вопросъ приводится къ построенію прямоугольнаго $\triangle$-ка по данной гипотенузѣ s и по данному перпендикуляру $\sqrt{bc}$ изъ вершины прямого угла на гипотенузу. Отрѣзки гипотенузы будутъ искомыя сто-

роны b и c. Задача имѣетъ одно рѣшеніе, если $\sqrt{bc} \leqq \frac{s}{2}$, или $s \geqq \sqrt{a^2+4m^2}$ и не допускаетъ рѣшенія, когда $s < \sqrt{a^2+4m^2}$.

П. Свѣшниковъ (Троицъ), *А. Шульженко* (Кіевъ). Ученикъ Курск. г. (8) *В. Х.*

№ 556. Одна изъ параллельныхъ сторонъ равнобочной трапеціи равна a, высота трапеціи равна прямой, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ. Найти радіусъ круга, описаннаго около трапеціи.

Пусть ABCD будетъ данная трапеція; бока ея $AB=CD=a$, параллельныя стороны $AD=x$ и $BC=y$, высота—CK. По теоремѣ Птоломея:

$$AC^2=xy+a^2.$$

Радіусъ круга, описаннаго около $\triangle$-ка ACD, а слѣдовательно и около трапеціи ABCD, равенъ произведенію трехъ сторонъ его, раздѣленному на учетверенную площадь; но

$$\text{площ. } ACD=\frac{(x+y)x}{4}.$$

слѣдовательно

$$R=\frac{ax\sqrt{xy+a^2}}{x(x+y)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Изъ прямоугольнаго $\triangle$-ка CKD найдемъ

$$CK=\sqrt{a^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

кромѣ того

$$CK=\frac{x+y}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Изъ сопоставленія (2) и (3) имѣемъ

$$a^2=\frac{x^2+y^2}{2};$$

подставляя эту величину вмѣсто a^2 въ (1), получимъ

$$R=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

С. Ржаницынъ (Троицкъ), *Н. Волковъ* (Воронежъ). Ученики: Курск. г. (6) *К. А.*, (7) *К. П.* и *В. Х.*, Великол. р. уч. (7) *А. В.*, Урюп. р. уч. (7) *П. У—ъ*, 2-й Тифл. г. (8) *М. А.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 1 Ноября 1890 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.